**1. поле С комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Окрестности.**

Системы комплексных чисел – это объект изучения алгебры, в котором они возникают как упорядоченные пары действительных чисел.

В курсе математического анализа комплексные числа удобнее рассматривать в виде  где х- дейтв. Часть, у – мнимая часть.i- мнимая единица. х = Rez, y=Imz. Над компл. Числами можно выполнять арифм опреации: +, -, \*, /,, , соотв формулы получ с учетом ,  



Геометрическая интерпритация компл числа возникает в результате соотв-ия мн-ва С чисел и мн-ва т-к пл-ти, т.е. каждому компл числу ставится в соотв-ие т-ка пл-ти корд-ты которой, представляют собой действ и мнимую часть числа С. ; - аргумент.

поэтому с компл числом связано 2 его хар-ки: 1. модуль компл числа это длина вектора, исходящего из начала корд, с концом в т-ке z. Аргумент C числа Z это величина угла между действ осью ОХ и соотв радиусом вектора. . В данном случае, плоскость в кот отмечалось компл число наз-ся компл пл-тью или z – пл-тью. Ось OX- действ ось, ОУ- мнимая ось. Мн-во компл чисел с введением на нем операц +,\*, образуют поле, это поле наз-ся компл и обозн-ся С. Т.о нами установлено соотв-ие м-ду полем компл чисел и пл-тью. Аргумент компл числа опр-ся неодн-но, с точностью до слаг-го где k-целое число.Argz- аргумент. Аргумент можно вычислить с учетом ограничений при этом, получается главное значение аргумента компл числа, которое обоз-ся . Получим формулу для вычисления главного значения аргумента с учетом того что .



Особые случаи:1. z=x, при x>0 argz=0 при x<0 argz=

2. z=0 аргумент не опр-ся

3. z=iy при у>0 argz= при у<0 argz=-

 k-целое число. Из геометр соображ ясно что 

 - тригонометрическая форма записи С числа. Используя формулы Эйлера получим показательную формулу записи компл числа - показательная формула записи. Для дальнейшего рассмотрения важно понятие окрестности С числа.  окрестностью т-ки  наз-ся мн-во т-к компл пл-ти котрое удовл-ет 

**2. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция; её основные свойства.**

Для дальнейшего построения теории удобно расширить описанную выше конечную z-плоскость, присоединив к ней одно несобственное число ∞. Наглядная модель расширения возникает с помощью стереографической проекции (см. рис.).

Точки сферы единичного радиуса проектируют из “северного полюса” на “экваторную ” плоскость. Возникает вз.-однозн. соотв. м/у точками сферы и пл., при кот. верхней полусфере соответствует внешность единичного круга на пл., а его внутренность соответствует нижней полусфере; “южному полюсу” S соотв. Центр окр. О, а “северному” N ~ ∞. Единственность т. ∞, создающей расширенную компл. пл., наглядно иллюстрируется тем, что любому варианту неограниченного удаления от т. О по пл. соответствует приближение к N по сфере.

Естественно поэтому, что окрестность т. ∞ определяется как внешность любого круга.

Напр.: окрест-ю ∞ будет мн-во компл. ч. z, для кот-х |z|>R, где R фиксир. действ. ч., R>0.

Понятие модуля, аргумента, действ. и мнимой части для ∞ не вводится; ∞ компл. ч. не является, но с ∞ возможны некоторые операции, напр., для комл. ч. z, ∞±z-∞; z/∞=0; ∞/z=∞; при z≠0 z∙∞=∞ и z/0=∞ и т.п. Лишены смысла конструкции ∞±∞, 0/0, ∞/∞, 0, ∞.

Основные св-ва:

1. окружности на сфере соответствуют окружностям на пл., причем окружностям, проходящим ч/з центр сферическим проекциям, соответствуют на пл. прямые линии.

2. Соответствие, устанавливаемое сферическими проекциями яв-ся конформным, т.е. сохраняет углы.

**3. Отображение из С в С, его действительные и мнимые части. Прелел и непрерывность ф-ии комплексного переменного**.

Понятие функции комплексного переменного является частным случаем общего понятия функций. В этом случаи область определения и множ значений как правило являются подмнож множ С, т.е. .

 

область множ

опред. знач.

z-множ т. Из обл. опред. , 

w=f(z) 

Где z-аргумент, w-функция.

И этого следует, что задание функции комплексного переменного связано с заданием двух функций , v=v(x,y)

w=u(x,y)+i∙ v(x,y)

Rew=Ref(z)=u(x,y)

Imw=Imf(z)= v(x,y)

Наоборот задание пары функций двух дейст. переменных можно расценивать как задание функции комплексного переменного.



 

 

Таким образом задание функции комплексного переменного эквивалентно заданию пары функций двух действительных переменных, а геометрически оно иллюстрируется отображением множ т. z-плоскости на множ т. w-плоскости.

В частности при определенных ограничениях взаимная однозначность отображ и не прерывность w=f(z) будем иметь отображение областей (это связанное открытое множ при чем граница переходит в границу)

w=f(z)

1. w=z2

 u(x,y)=

v(x,y)=2xy

2. w=

Данная функция является однозначной только в одну сторону, т.к. всем точкам w=R ставят в соответствии = R это окружность с центром в т. (0;0) и радиусом R. Следовательно в обратную сторону отображение многозначное.

Говоря о функции комплексного переменного мы будем иметь в виду однозначное отображение, но случай когда одному прообразу соответствует более одного образа множ, бесконечное множ), не будет исключением в дальнейших рассуждениях. Речь тогда пойдет о многозначных функциях.

3. w=Argz – функция многозначная бесконечно-значная, т.к. 

4. w=

ai=const

z-аргумент.

Пусть ф-я w=f(z) определена и непрерывна во всех точках, кроме точки .

**Опр**. Комплексное число А наз. ***пределом*** ф-ии f(z) в т., если . .

Для ∀ ε-окрестности найдется такая ν-окрестность т. z-плоскости, которая целиком отображается в ε-окрестность т.А. Пусть ф-я , , . ; .Справедливы основные теоремы о пределах. , ,то 1);

2) ;

3).

Пусть ф-я w=f(z)определена в некоторой окрестности .

**Опр**.Ф-я w=f(z) наз.***непрерывной*** в т.******, если .

**Опр**.Ф-я явл. ***непрерывной*** в т. =x+iy, если ф-ии u(x,y) и v(x,y) – непрерывны в т..

**Опр**.Ф-я f(z) – наз.непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области. Для непрерывных ф-ий справедливы теоремы о непрерывности. f(z)+q(z); f(z)\*q(z); f(z)/q(z),q(z)не=0.

**Опр.**Ф-я w=f(z) наз.равномерно непрерывной на мн-ве Е, если .

**4.степенные ряды в комплексной области. Теорема Абеля. Круг сходимости.**

Будем рассматривать функциональные посл-ти и функ-ые ряды. По аналогии с предыдущей теорией рядов очевидно, что все ф-ции должны иметь общую обл опр-ия Е. тогда для любого  получаем соотв-ую посл-ть и ряд.котрые будут явл-ся соотв-но числовой посл-тью и числовым рядом, членами котрых будут С числа.главным вопросом в теории посл-ти и в теории рядов явл-ся вопрос об обл-ти сходимости функц посл-ти и функц ряда, т.к при подстановке вместо z  , функц ряд(посл-ть) может оказаться как сход-ся так и расходящейся. В частности в случае степенного ряда как и в случае действ переменной Х имеет место теорема Абеля.

Теорема Абеля: функц ряд вида называется степенным рядом (общий случай) в частности  т.к явл-ся степенным; заметим что посл ряд отл-ся от первого простым преобразованием (сдвигом). В дальнейшем мы будем всю теорию рассматривать для этого частного случая, а «переложить» ее на общий случай можно воспользовавшись указанным преобразованием, что степенные ряды имеют область сходимости специального вида: вид этой обл можно усмотреть из т. Абеля. Т: 1) если ряд (1) сходится в т-ке то он сходится в любой т-ке z, удовл-ий нер-ву  2) если ряд (1) расходится в любой т-ке удовл нер-ву . Док-во: т.к ряд (1) сходится в т-ке , то ряд



общий член этого ряда: (по необходимому признаку сходимости) значит (n- по модулю ограничено.) рассмотрим теперь модуль общего члена степенного ряда (1)  произведем его оценку 

где М>0 z-фиксировано.

мажорирущ для ряда (1). Рассмотрим будет рядом, состоящим из членов геометр. Прогрессии со знаменателем g<1. он сх-ся. ряд (1) сх-ся абсолютно для указанных значений z. 2) пусть ряд (1) расх-ся в т-ке z1, покажем, что в любой т-ке z, где  ряд расх-ся. Предположим, что ряд в т-ке z сх-ся. Тогда по первой части теоремы рядв т-ке z должен сх-ся, что противоречит усл-ию, т.к в т z по усл-ию ряд (1) расх-ся ч.т.д. вывод Т. Абеля позволяет установить специальный вид обл сх-ти, который для случая компл переменных пред собой круг сход. 1) ряд 

R- радиус сходимости. 2) 

По аналогии с предыдущей теорией можно сформировать понятие равномерной сходимости степенного ряда и теоремы о св-ах степенных рядов.1) у авномерной сходимости степенного ряда внутри круга сходимости. 2) о непрерывности суммы степенного ряда внутри круга сходимости 3) о возможности почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда внутри круга сходимости.

**5. Дифференцируемость и производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции.**

Понятие функции комплексного переменного является частным случаем общего понятия функций. В этом случаи область определения и множ значений как правило являются подмнож множ С, т.е. .

 

область множ

опред. знач.

z-множ т. Из обл. опред. , 

w=f(z)



Где z-аргумент, w-функция.

И этого следует, что задание функции комплексного переменного связано с заданием двух функций , v=v(x,y)

w=u(x,y)+i∙ v(x,y)

Rew=Ref(z)=u(x,y)

Imw=Imf(z)= v(x,y)

Наоборот задание пары функций двух дейст. переменных можно расценивать как задание функции комплексного переменного.



 

 

Таким образом задание функции комплексного переменного эквивалентно заданию пары функций двух действительных переменных, а геометрически оно иллюстрируется отображением множ т. z-плоскости на множ т. w-плоскости.

В частности при определенных ограничениях взаимная однозначность отображ и не прерывность w=f(z) будем иметь отображение областей (это связанное открытое множ при чем граница переходит в границу)

w=f(z)

1. w=z2





u(x,y)=

v(x,y)=2xy

2. w=

Данная функция является однозначной только в одну сторону, т.к. всем точкам w=R ставят в соответствии = R это окружность с центром в т. (0;0) и радиусом R. Следовательно в обратную сторону отображение многозначное.

Говоря о функции комплексного переменного мы будем иметь в виду однозначное отображение, но случай когда одному прообразу соответствует более одного образа множ, бесконечное множ), не будет исключением в дальнейших рассуждениях. Речь тогда пойдет о многозначных функциях.

3. w=Argz – функция многозначная бесконечно-значная, т.к. 

4. w=

ai=const

z-аргумент.

Понятие производной и дифференциала ф-ии компл-го переменного.

Внешне (формально) опр-е производной ф-ии в точке аналитично опр-ю производной ф-ии дйствительного аргумента.



Аналогично с ф-ей действительного переменного можно ввести понятие дифференциала.



Важное знач. имеет запись:  (\*)



(\*)-получили по 3 св-ву бесконечно малой ф-ии,отличается от своего предела на бесконечно малую ф-ию.

-дифференци-ая ф-ия.

Правила дифферен-ия:

1.(CW)’=CW’, C=const

2.(f1f2)’=f1’f2+f1f2’

3.(f1+f2)’=f1’+f2’

4.(f1/f2)’=(f1’f2-f1f2’)/

5.W=f(z), z=z(), W’=(dW/dz)(dz/d)

Необходимое и достаточное условие дифф-ти ф-ии комплексного переменного.



Т:Ф-ия f(z) диффер-ма в точке z=x+iy т.и т,к:1)ф-ии u(x;y) и v(x;y) диффер-ма в точке (x;y),как ф-ии двух действ-х переменных.2)Выполняются условия Коши-Римана:



Д-во:Ранее было (\*)

1.НЕОБХОДИМОСТЬ

дано:f(z)-диффер. док-ть:1),2)

док-во:по условию ф-я f(z)-дифф. значит выполняется (\*)



Подставим все эти выраж-я в равенство (\*) и разделим в нем действ. и мним части



Ф-ии u(х;у) и v(x;y)- это ф-ии двух действ-х переменных,условия системы гарантирует дифф. этих ф-ий в точке (х;у),т.к. 



Ранее было.что 

2.ДОСТАТОЧНОСТЬ

дано:1),2). док-ть: f(z)-дифф-ма .Док-во:

из 1ого условия∆u=∆





Подставить Коши-Римона

Домножим второе равенство на I и сложим с первым.

Учитывая равенство частных производных получим:



Сравнивая полученное с равенством (\*) и обозначая ч/з



 (\*\*)

получим (\*\*) где при  и 

достаточность доказана.

Замечание: в ходе док-ва была получена формула для вычисления производной ф-ии в точке:

Опр:Ф-ия W=f(z) называется аналит а т.z0 ,если она имеет производную в некотор окр-ти в этой т. z0, вкл z0/

Опр:Ф-ия W=f(z) наз-ся аналит в некотор обл,если она диффер-ма в каждой т этого множ-ва.

**6.Гармонические функции; их связь с аналитическими функциями. Восстановление аналитической функции по действительной или мнимой части.**

Если предположить, что ф-ии υ(*x*;*y*), и*u* (*x*;*y*) для аналитической ф-ии *f*(*z*)=*u*+*i*υ имеют вторые производные, то легко док-ть, что каждая из них удов-ет так называемому ур-ию Лапласа:

.

Ф-ия двух дейст. переменных наз-ся *гармонической* в области G, если она обладает непрерывными частными производными 2-го порядка и удов-ет ур-ию Лапласа. Т.о. верно утверждение: дейст. и мнимая части аналитической ф-ии в области G яв-чя гармоническими в G. Пример: восстановить аналитическую ф-ию *w*=*f*(*z*) по ус-ям: *u*(*x*;*y*)=*x*4-6*x*2*y*2+*y*4, *f*(0)=0. Для начала нужно проверить яв-ся ли ф-ия гармонической, т.е. удов-ет ли ус-м Лапласа:

.

, 

,.

**7. Геометрический смысл аргумента и модуля производной аналитической функции. Конформные отображения.**



Модуль - расстояние от т. до т. - расстояние между их образами.

При переходе к пределу при отношения расстояний этих модулей можно трактовать как коэффициент растяжения в данной т. при данном отображении.

Пр. - то расст. Между образ. в 2 раза больше чем между праобразами, т.е. любая окрестность радиус которой в 2 раза больше .

Пусть в области в - плоскости задано Жорданова гладкая кривая , рассмотрим случай, для которой .

Известно, что в каждой точке существует касательная понимаемая как предельное положение секущей.

**(рис.)**

Праобраз

Образ

Угол наклона касательной к оси совпадает с .

Действительно: Угол наклона секущей(направление секущей) совпадает с .

Тоесть ее угол с осью абцисс совпадает с аргументом этого числа. Остается лишь перейти к пределу .

Пусть диффер. Ф-ия отображает обл. в - плоскость, причем . Тогда для образа исходной кривой в - плоскости, угол наклона касательной определяется так:



Угол наклона у образа отличается от угла наклона у праобраза касательной на первое слагаемое .

 не зависит от выбора исходной кривой, т.е. любая кривая проходящая через точку  в результате отображения повернется на угол .

**Вывод:** Это и есть геометрический смысл аргумента производной.

Если даны 2 кривые, а угол между этими кривыми равный , то при отображении кривые повернутся, а угол между ними сохранится.

Опр. Отобр. задаваемое аналитической ф-ей сохран. Углы между кривыми проходящих через данную точку называется конформным в данной точке.

Из предыдущей ясно, что отображение будет конформным, если .

При отображении угол сохраняется, а ориентация плоскости может поменяться, при этом говорят о конформном отображении 1-го рода.

Если ориентация не меняется, то конформное отображении 2-го рода.

Т.: Отображение посредством аналитической функцииявл. конформным отображением 1-го рода во всех точках точках - плоскости, для которой 

**8. Линейная функция и конформное отображение, задаваемое ею.**



- комплексные числа.

- переменная.



При этом 

Рассмотрим частные случаи

1) 

Задает параллельный перенос на вектор задаваемый числом .

2) 

.

Из вида уравнения следует .

Данная функция задает поворот на угол .





3) 



Получим гомотетию с центром в начале координат и коэф. равным .

Рассмотрим общий случай.





Таким образом получим композицию, которая является преобразован. Подобия, таким образом с помощью лин. отображения можно фигуру преобраз в подобную ей фигуру.

**9. Дробно - линейная функция и её свойства.**



Для того чтобы было комфорными, нужно чтобы 

Интересен случай когда , т.к. функция превращается в линейную.



Ф-ия будет аналитической, поэтому она отобр. конформным отображением - плоскости, т.е. 

Для рассмотрения св-в этой функции рассм. частный случай.

Этот частный случай получается из общего .

Св-ва этой функции состоит в том, что это преобр. явл. композицией 2-ч преобразов. симметрии.

1. Инверсия – преобр. точки относительно окружности (0,1).
2. Симметрии относительно прямой (в данном случае отн. оси ОХ).

Любое дробно-линейное отображение



Можно описать как композицию 2-х преобразований: подобие и симметрии

Кроме этих св-в дробно-линейн функции обладает след св-ми.

1. Групповое.

Совокупность всех дробно-линейных преобразований образует группу относит. операции умножения.



1. Круговое

Можно обосновать что при дробно-линейном отображение любая окружность отображения в окружность в частности прямую можно рассмотреть как частн. случай окружности с бесконечн радиусом.

На практике выяснить в какую линию преобразовать исходн. линию позволяет подстановка(проверка) принадлежности праобразу точки , если





1. Дробно-линейная функция может быть обнозначно задана с помощью указания образов 3-х точек.



В результате получим





Замечание:

Если окажется, что какое-то из чисел

, то с использованием понятия линейн. перехода можно доказать, что в этом случае для нахождеия дробно-линейн. ф-ии, разность в котор входит бесконечность нужно заменить на 1.

1. С помощью дробно-линейного отображения можно совершать преобразования круговых областей, руководствуясь правилом обхода области по контуру.

Например при обходе по границе области праобраза от т. до т.  область остается справа, то и при обходе обл. образа т. до область будет так же оставаться справа.

**10. Cтепенная функция и радикал. Понятие о Римановой поверхности.**

Общий вид степенной функции с натуральным показателем 

Рассмотрим теорию для частного случая, который получается из общего параллельным переносом на вектора 

  

Для частного случая , поэтому отображение будет конформным.

Рассмотрим св-ва: 

Определим, как будет отображаться координатная сетка. Зафиксируем для этого z.









Рассмотрим угол 

При том образом данного угла будет вся w плоскость с разрезом по положительным направлениям оси Ox

Если угол будет расти и примет значение 



То образ начнет покрывать W-плоскость вторично, как бы переходя на новый лист W-плоскости как по винтовой линии.

Когда  станет равным , то W покроется вторично.

Увеличивая  мы будем получать все новые и новые экземпляры W-плоскости с разрезом, которые в конечном итоге и будут образовывать Риманову поверхность.

При , мы получим образ, соответствующий , т.е. последний n-ый лист римановой поверхности должен без самопересечения склеиться с первым листом.

В трехмерном пространстве такие поверхности не помещаются, след-но они пред-ют собой идеальную модель.

В z=0 конформность отображения нарушается, поэтому соотв-ю ей точку N=0, называют точкой разветвления n-го порядка.

Рассм ф-цию обратную к степенной , z – натур. Эта ф-ция в кажд точке z ставит в соотв-ии , кот-я м.б. вычислена по ф-ле Муавра.

Эта ф-ла при , позволяет получить n-разных знач-й корня n-й степени.

Если рассм ф-цию в w-плоскости, то она будет многозначной (n-значной). Если рассм ф-цию Римановой пов-ти, то ф-ция будет однозначной. В этом и заключается смысл Римановой пов-ти. Н-р,  все значения этого корня лежат на окружности с центром (0;0) и  и являются вершинами правильного треугольника (n-угольника n=3)

**11. Показательная функция.**

Показательная ф-циям.б. определена с помощью ряда







Рассмотрим св-ва показ-й ф-ции:

1. отображение конформно в любой точке пл-ти.
2. 



1. 

 

1. Периодичность ф-ции , k=0,1,…



Рассмотрим св-ва отображения z-плоскости с помощью этой ф-ции 





1. x=с=const , 
2. y=с  

**12. Логарифмическая функция.**

Логарифм ф-ция каждому ставит в соответствие 

 









 

 , k=0,1,2,…

****

Пример:

Ln(-i)=?

Z=-i









Логарифмическая функция – бесконечнозначная функция.

Можно показать, что справедливы все формулы для логарифма, аналогичные соответствующим ф-лам для действит-го логарифма.

 и т.д.

Иногда бывает полезно рассмотреть главные значения логарифма: 

Рассмотрим рассуждения о вышесказанных показат-х функциях следует, что отображение взаимнооднозначное для полосы 

При отображении соседних полос будут получаться следующие экземпляры w-плоскости с разрезом, поэтому логарифмическая ф-ция будет однозначной на своей бесконечно-листной римановой пов-ти. При чем - это точка разветвления бесконечного порядка.

**13. Интеграл по комплексному переменному, его основные св-ва.**

Пусть в компл-ой пл-ти задано параметрически гладкая кривая , где 

, - непрерывна. На этой кривой определена непрерывная ф-ия 

,  - произвольным образом выбранная точка на участке. . Разбиению кривой АВ на участки, соответствует разбиение отрезка от до точками. Если рассмотреть предел, рассмотрим предел . Если этот предел, конечен и не зависит от способа разбиения кривой АВ на участки и выбора т-ки , то он наз интегралом от ф-ии комплексного переменного по кривой АВ=.. Само определение интеграла позволяло определить интеграл вида: (\*), , (проверить).

Мы получили конструкцию, напоминающую криволинейного интеграла для ф-ии дейст-го переменного. В предыдущих предложениях м.б получены след. вычислит. формула: , т.е мы получили формулу: . По аналогии с интегралом ф-ии действ-го переменного рассмотрим св-ва: 1).Линейность . 2) Аддетивность интеграла относительно области интегрирования

. 3) При смене направления интегрирования интеграл меняет знак. 4) Оценка модуля . Пример, 

, .

**14. Теорема Коши для односвязной и многосвязной области**.

**Опр**. ***Односвязной областью*** наз. область ограниченная одним связным контуром, иначе область наз. ***n-связной*** по числу ограниченных ее связных контуров.

**Т:** Пусть G – односвязная область, f(z) – однозначная аналитическая ф-я, определенная на этой области и L – любая замкнутая кривая спрямляемая лежащая в G. Тогда . **Д-во**: в дополнительном предположении, что ф-я f '(z)- непрерывна. По условию f(z) – аналитическая выполняется условие Коши – Римана: ; , т.к. f '(z)- непрерывна, то   непрерывность частных производных. (\*) Применим ф-лу Грина:

 к каждому интегралу записи(\*) . . Поэтому исходный интеграл .

Оказывается, что инт. теорема Коши имеет место и длч многосвязных обл.

 ; ; . Получили что интеграл по границе обл. Д: .

В случае n-связной области Т.Коши так же имеет место.

Формула имеет вид: . Однако для удобства важное значение имеет интегральная

Т.Коши.: Причем, контуры могут обходиться водном и том же направлении, н-р по часовой стрелки. **Интеграл и первообразная**. Из инт.Т.Коши , что интеграл от аналит.ф-ии в односвязной обл.не зависит от пути интегрирования. Поэтому можно записать, что , где F(z)-первообразная для ф-ии f(z). F’(z)=f(z). В связи с этим для функции комплексного переменного имеет место формула Ньютона – Лейбница для данной ф-ии: .

**15. Интегральная формула Коши.**

**Т:** Пусть ф-я f(z) – однозначная и аналитическая на обл.G; L- замкнутая спрямляемая, принадлежащая обл.G вместе со своей внутренней обл.Д, тогда для любой точки  справедлива формула: .

При этом интеграл Коши имеет вид: .

**Замечание**: интеграл Коши позволяет вычислять значение ф-ии, в некот. внутренней точки обл-ти, если известно значение ф-ии на границе этой обл-ти. Интеграл Коши (формула Коши) имеет место и для точек, лежащих вне этой области и =0. интеграл теряет смысл, для точек, кот.принадлежат границе.

**16,19Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Ряд Тейлора. Разложение аналитической функции в  
степенной ряд.**

Справедлива след. **теорема:** однозначная аналитическая в области *G* ф-ия *f*(*z*) разлагается в степенной ряд в окр-ти каждой точки области *G*. **(рис.1)**

Р! *z*0 принад. *G*. Начертим окр-ть γρ в центре в т.*z*0 и радиусом ρ. Все точки на границе окр-ти будем обозначать ξ. Р! т.*z* внутри этой окр-ти, тогда для этой точки будет справедлива интегральная формула Коши:





Модуль дроби в знаменателе <1, т.к. 

Тогда по формуле бесконечно убывающей геом. прогрессии все равно:



Подставляя полученное выр-ие в интегральную формулу Коши, получим:



Почленно интегрируя данное рав-во, получим:

, где .

Т.к. полученное разложение аналитической ф-ии *f*(*z*) в степенной ряд един-о, то полученный степенной ряд будет яв-ся рядом Тейлора, коэф-ты которого выч-ся по формуле: . **Замечание:** сравнивая последнее выр-ие с последней формулой можно записать формулы Коши для зн-ий n- ой производной:

.

Р! случай, когда в некоторой отдельной изолированной точке ус-ие аналитичности нарушается. В этом случае поведение ф-и можно описать рядом Лорана:



Ряд (2) яв-ся степенным, значит область сходимости ряда – круг с радиусом R, т.е . Ряд (1) можно преобр-ь в степенной путем замены переменной: . Тогда . Исходный ряд будет сходиться в кольце . Рис.2. Введенная нами замена переменной не нарушает аналитичности ф-ии. Ф-ия f(z) будет бесконечно диф-ой, поэтому ряд Лорана представляет собой аналит. ф-ию в кольце. Ясно, что сходимость ряда Лорана внутри кольца будет равномерной, поэтому ряд Лорана можно почленно интегрировать по окр-ти γρ, расположенной внутри кольца: рис.3. .

 

Проинтегрируем рав-во по окр-ти γρ: 

Интеграл, стоящий в правой части равен 0 во всех случаях, кроме n=k. В этом случае он равен 2πi. Тогда весь интеграл равен 2π*ian*. След-но, получается выр-ие для 

Формула по виду напоминает соот-ую формулу для ряда Тейлора. Формула показывает, что коэф-ты ряда Лорана выч-ся однозначно, поэтому разложение ф-ии в ряд Лорана един-но. **Теорема:** ф-ия *f*(*z*) однозначная и анал. в круговом кольце представима в нем рядом Лорана.

**17.теорема Лиувилля.( понятие целой ф-ции. Основная теорема алгебры)**

1. Нер-ва Коши для коэф-тов степенного ряда. Обозначим и оценим коэф-т степенного ряда  - нер-во Коши.

Опр-е: ф-ция наз-ся целой, если она аналитическая во всей конечной компл пл-ти. Пример. целые ф-ции: многочлен 

2. Т. Лиувилля: если целая ф-ция ограничена по модулю, то она константа. Док-во: степенной ряд .в который разлогается целая ф-ция f(z)=сх-ся во всей пл-ти, т.е; заведомо, в любом круге . Пусть по условию . Применим нер-во Коши: . Учитывая что можно выбрать сколь угодно большим, убеждаемся что при . Теорема доказана.

С помощью этой теоремы может быть установлено, например, алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Суть ее в основной теореме алгебры.

3. основная теорема алгебры: всякий многочлен имеет в поле комплексных чисел по крайней мере один корень. Док-во: от противного: пусть нет чисел обращающих  в нуль. Тогда - целая ф-ция, она ограничена по модулю. Действительно, т.е она ограничена в некоторой окр-ти т-ки - во внешности некоторого круга и в нем – тоже (как всякая непрерывная ф-ция) тогда по теореме Лиув. , что противоречит очевидности зависимости ее от z.

**18,20 Нули аналитической функции. Изолированность нулей.**

Если ряд Тейлора однозначной аналитической ф-и *f*(z) имеет вид *f*(*z*)=*a*k(*z*-*z*0)k+*a*k+1(*z*-*z*0)k+1+...+*a*n(*z*-*z*0)n+...(*a*k≠0), то *z*0 – нуль кратности k. Если *k*=1, то *k* наз-ся простым нулем. Пример: *f*(*z*)=1-*cos z*, *z*=0. *f*(0)=1-*cos* 0=1-1=0. *f'*(*z*)=*sin z*, *f*'(0)=0, *f*''(*z*)=*cos z*, *f*''(0)=1≠0 — значит *k*=2, т.е нуль кратности 2. Очевидно, признак простого нуля *f*(*z*0)=0, *f'*(*z*0)≠0. Для аналитической ф-ии имеет место след. **Теорема:** если *f*(*z*)≠0 и ф-ия *f*(*z*) — аналитическая, то все нули ф-ии *f*(*z*) — изолированы. Изолированность нуля означает, что сущ-ет окр-ть нуля, внутри которой нет другого нуля. Будем р!-ь *U* окр-ть т*.z*0 и ф-ию *f*(*z*)- аналитическую в этой *U*-окр-ти т.*z*0, исключая возможно саму т.z0 (рис.1). Возможно 2 случая: 1) сущ-ет такая точка *а*0, что положив *f*(*z*0)=*a*0, получим аналитическую ф-ию, значит z0 – наз-ся правильной; 2) такое число *а*0 не сущ-ет, *z*0-изолированная особая точка. **Теорема:** т.*z*0-правильная для аналитической в окр-ти т.*z*0 ф-ии *f*(*z*) (*z*≠*z*0)↔сущ-ет *U*-окр-ть т.*z*0, в которой |*f*(*z*)|-ограничена. Из этой теоремы можно получить признак правильной точки отсутствием ряда , в соот-ем разложении ф-ии *f*(*z*) в виде ряда Лорана (т.е. Отсутствуют коэф-ты с «-» степенями). Если |*f*(*z*)|-не ограничена, то *z*0 – особая точка. Возможны случаи: 1) , то т.*z*0 – наз-ся полюсом. 2) , тогда т.*z*0 – наз-ся существенно особой точкой. Пример: , z0 – полюс кратности 2. Имеет место след. Теорема о взаимосвязи нуля и полюса ф-ии: z0 – полюс *f*(*z*) ↔*z*0 – яв-ся полюсом . Т.z0 наз-ся полюсом кратности k для ф-ии *f*(*z*), если *z*0 яв-ся нулем кратности k для ф-ии. Учитывая вид степенного ряда для ф-ии *f*(*z*), в случаи, когда *z*0-яв-ся нулем кратности k легко понять, что ряд Лорана будет содержать конечное число членов с «-» степенями, т.е ряд Лорана будет иметь вид: *f*(*z*)=*a-*k(*z*-*z*0)-k+...*а*0+*a1*(*z*-*z*0)+...*a-*k≠0. Для разложения ф-ии f(z) в окр-ти сущ-но особой точки *z*0 в ряд Лорана потребуется бесконечно много членов с «-» степенями, поэтому признак сущ-но особой точки — это наличие в ряде Лорана бесконечного числа членов с «-» степенями.

**21. теорема Соходского.**

Т. Т-ка  - полюс для f(z) нуль для . док-во: необходимость если полюс F(z)то и  окрестность т-ки , в которой например, тогда в этой окр-ти  т.е - правильная т-ка для причем . Значит 

Достаточность: Если  - нуль для , то он изолирован: поэтому существ , такое что f(z)- аналетическая, в кольце . По скольку - полюс для f(z). Ч.т.д.

Опр: т. - называется полюсом кратности К для f(z) если - нуль кратности К, для .

Учитывая вид степенного ряда, для аналетической функции в окрестности нуля, легко понять, что ряд Лорана построенный в окрестности полюса кратности К для функции содержит конечное число членов с отрицательными стипенями:

, . Поэтому признак существенно особой точки- наличие бесконечного числа членов с отрицательными степенями в ряде Лорана. Поведение функции в окрестности существенно особой точки заслуживает особого внимания.

Теор Сохоцкого: Если - существ особая точка для f(z) то, какого бы ни было комплексное число А(не исключая и А=), существ послед , для которой . Док-во: Если А=, то теорема очевидна, т.к не ограничен во крестности . Пусть А. Рассуждаем от противного. Если в любой окрестности  нет точек сколь угодно близких А , то в некоторой окрестности U () поэтому  ограниченна по модулю в U, т.е  правильная точка для . Однако  не ограничен в U. Поэтому , но тогда - полюс для , т.е и для f(z), что приводит к противоречию с условием теоремы. Ч.т.д.

**22. Вычет Ф комплексного переменного.Основная теорема о вычетах.**

Пусть требуется вычислить интеграл по замкнутому контуру Г от аналитической в обл. D ф-ии f(z),которая может иметь изолированные особые точки z1,…,zn в D.Опишем вокруг zi (i=1…n) окружности (см. рис).

Тогда .Разложим f(z) в ряд Лорана в окр-ти т. zi и проинтегрируем по  почленно.Интегралы от всех членов ряда будут равны нулю,кроме того,что относится к члену  и равен ,поэтому .Т.о,коэффициент при (z-a)-1 в ряде Лорана,построенном для окрестности изолированной особой т аналитической Ф,играет особую роль при вычислении интегралов.Он наз-ся вычетом f(z) относительно т. а и обозн-ся (или )

Получаемая выше формула носит наз-е основной теоремы о вычетах:

Т:пусть f(z)-аналит-я в обл. G функция,исключая конечное число особых точек.Тогда интеграл от нее по замкнутому контуру ГG равен умноженной на  сумме вычетов относительно особых точек,лежащих внутри Г.

**23.Вычисление вычетов относительно полюса.**

1).Вычисление вычетов оказывается сравнительно простым для полюсов.Пусть,например,***а***-простой полюс.Тогда в его окр-ти ряд Лорана для f(z) имеет вид:Очевидно поэтому, что . В частности, если ,где ,а  имеет простой нуль в т.***а ***,тогда .

Примеры: •Для ф-ии

разложение в ряд Лорана получается подстановкой вместо  его ряда Тейлора.

Имеем , т.е. .

•; имеет в т. простой нуль, поэтому:

2).Пусть теперь ***а-***полюс кратности ***к (к>1)***.Тогда ряд Лорана имеет вид:

Умножив обе части на  и дифференцируя их (к-1), получим:

Остается перейти к приделу при  .

Например, возвращаясь к первому примеру •, замечаем, что в т. z=0 ф-я имеет полюс порядка 3.Поэтому

,т.к. .

3).Столь же эффективных способов вычисления вычетов в случае существенно особой точки не сущ-ет.Очевидно,что вычет относительно правильной точки равен нулю(по теореме Коши).

4).z0-существенно особая:формул нет,получить разложение в ряд Лорана и по нему найти вычет.

**24. применение теории вычетов к вычислению интегралов.**

Как ясно из основной теоремы о вычетах, последние играют решающую роль при вычислении интегралов комплексной пл-ти . однако оказывается, что и многие интегралы от ф-ции действ переменной эффективно вычисляются с помощью теории вычетов. Укажем на некоторые примеры и идеи. 1). рассмотрим интеграл вида  где R(U,V)это рациональная ф-ция. R\*(cost\*sint) непрерывна на отрезке . Положим тогда при возрастании t переменная z пробегает окружность  в положительном направлении, подставляя и , перепишем интеграл в виде , которому применима основная теорема о вычетах. Например . Задание: проведите подобные рассуждения, учитывая, что у подынтегральной ф-ции только один простой полюс  оказывается внутр круга. 2) , где ем многочлены, причм  и . Взяв контур интегрирования, как указано на рис., можно вычислить для  с помощью вычетов. Нетрудно показать, что при  . Поэтому в пределе исходный интеграл будет равен произведению  на сумму вычетов F(z) относительно всех ее полюсов в верхней полуплоскости. 3) Рассмотрим комплексный интеграл I=, где f(z)-аналитическая, за исключ, возможно, полюсов, функции в области G, а Г- замкнут контур, входящий в G вместе с ограниченной им областью D и не проходящей через нули и полосы f(z). Тогда, пользуясь теорией вычетов, можно показать, что I=N-P, где N- число нулей, а P – число полюсов f(z) внутри D. Интеграл I называется логорифмическим вычетом функции f(z) относитьельно контура Г. Указанный факат позволяет установить некоторые важные свойства аналетических функций и имеем интересные приложения в ряде научных областей.

**25. тригонометрические ф-ции**

Ранее были введены тригонометрические ф-ии cos z sin z с помощью соот-их рядов:  

Можно ввести эти ф-и с помощью формулы Эйлера: *eiz=cos z+isin z, e-iz=cos z-isin z.*

,

.

На основе этих формул м.б. получены аналогичные дейст. аргументам формулы тригонометрии: sin2 *z*+cos2 *z*=1, sin (*z*1+*z*2)=sin *z*1∙cos *z*2+cos *z*1∙sin *z*2 и др. Но св-ва триг. ф-ий комплексного переменного не совпадают со св-ми триг. ф-ий дейст. переменного. Например: не будет иметь место ограниченность ф-и  .

Р!-им обратные триг. ф-ии: *W*=Arcsin *z*, sin *w*=*z*, *W*=?



Аналогичным образом выводятся: *W*=Arcсos *z -*  ,

*W*=Arctg *z -*  , *W*=Arcctg *z -*  .

.